

Kolme näkökulmaa Apollonioksen ongelmaan

HANNU KORHONEN, lehtori emeritus, Orimattila, email korhonen.h@gmail.com

Ongelman geometrisella ratkaisemisella on tarkoitettu vanhastaan harpilla ja mitta-asteikottomalla viivaimella tehtyä piirrosta. Nykyään koulussa piirretään tällä tavalla hyvin vähän, ongelmanratkaisumielessä ei lainkaan. Geometriset ongelmat ratkaistaan laskemalla käyrien yhtälöiden tai trigonometrian avulla eli analyttisesti. Tämä ei voi olla vaikuttamatta siihen, että nykylukulaisten on perin vaikea hahmottaa tilanteita kuvioiden geometristen ominaisuuksien perusteella. Määritteleviäkään ominaisuuksia ei aina edes tunneta.

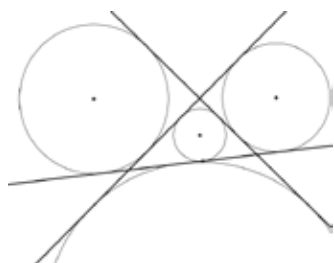
Apollonioksen ongelmaksä sanotaan kolmea objektia sivuavan ympyrän piirtämistä. Yleisessä tapauksessa objektit voivat olla pisteitä, suoria tai ympyröitä. Ratkaiseminen on laaja tutkimustehtävä, sillä erilaisia tapauksia on kymmenen. Helpoin niistä on kolmen pisteen tapaus. Se sopisi hyvin peruskoulussa ratkaistavaksi, sillä siinä ei tarvita muuta kuin keskinormaalien piirtämistä. Kolmea suoraakaan sivuavan ympyrän ongelma ei ole vielä kovin vaikea (Kuva 1), vaikka silläkin on useita ratkaisuja ja ratkaisujen

määrä riippuu suorien keskinäisistä asennoista.

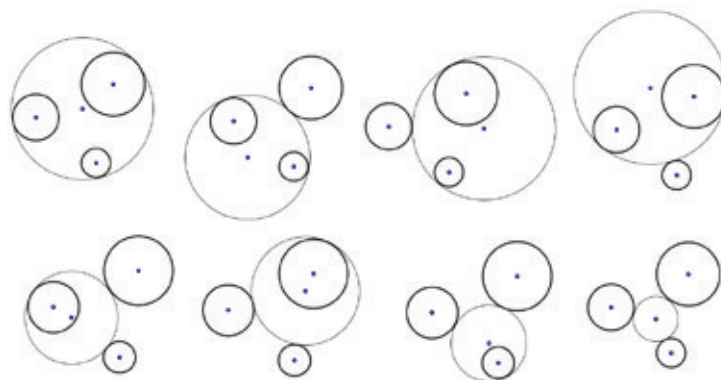
Eukleides ratkaisi nämä kaksi helpointa tapausta noin 300 eaa. (IV: 4, 5) ja Apollonios Pergalainen loput yhtä lukuun ottamatta sata vuotta myöhemmin. Apollonioksen ongelman vaikein tapaus on kolme annettua ympyrää sivuavan ympyrän etsiminen. Sen ratkaisi ranskalainen Viéte vasta 1500-luvulla, silloin tietysti vielä klassiseen tapaan harpilla ja viivaimella. Nykyään tuskin kenellekään tulee mieleen edes yrittää sitä, varsinkin kun tarkas-

teltavia tilanteita on kahdeksan (Kuva 2).

Viéten jälkeen ongelmalle on esitetty monia erilaisia ratkaisuja. Newton osoitti, että ongelma voidaan muotoilla myös niin, että on etsittävä piste, jonka kolmesta kiinteästä pisteestä mitatut etäisyydet tunnetaan. Tämä tekee Apollonioksen ongelmasta ajan-kohtaisen vieläkin, sillä juuri tämä on etäpaikannuksen, esimerkiksi LORANin tai GPS:n, keskeinen kysymys. Vilkkaan tutkimuksen kohteena ongelma oli vielä koko 1800-luvun. Monissa ratkaisuis-



Kuva 1 Kolme suoraa sivuavat ympyrät.



Kuva 2 Ympyrä voi sivuta kolmea annettua ympyrää kahdeksalla eri tavalla.

käytettiin harppia ja viivainta vahvempia matemaattisia työkaluja.

Laskennallisia menetelmiä korostavaan nykyiseen koulumatematiikkaan voisi ajatella parhaiten soveltuvan analyttisen ratkaisun. Silloin on kuitenkin ratkaistavana kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r \pm r_1)^2$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r \pm r_2)^2$$

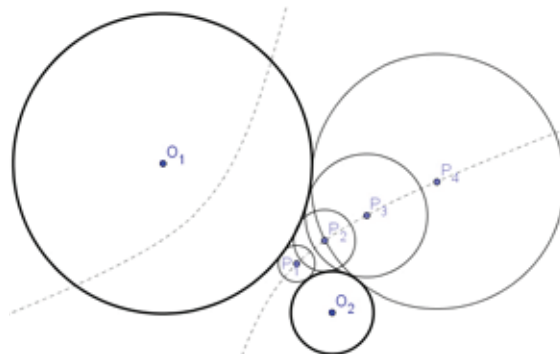
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r \pm r_3)^2$$

Kukin yhtälöiden oikeiden puolten plus- ja miinusmerkkiyhdistelmä vastaa yhtä edellä mainituista kahdeksasta tapauksesta. Tehtävä on käsin laskien työläs eikä siihen kukaan nykypäivänä ryhtyneekään, kun jo laskimissakin alkaa olla menetelmät yhtälöryhmän ratkaisemiseen jopa symbolisessa muodossa.

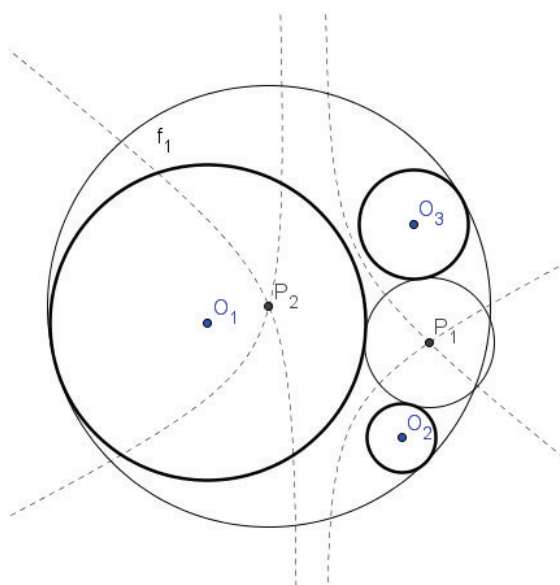
Nykyisin välinein ja lukiolaisen ymmärryksellä ja osaamisella on suhteellisen helposti tavoitettavissa ratkaisu, jonka idean esitti 1500-luvun lopulla belgialainen Adrian van Roomen. Ratkaisu perustuu siihen geometriseen havaintoon, että voidaan piirtää äärettömän monta ympyrää, jotka sivuavat kahta annettua ympyrää ulkopuolitse. Näiden ympyröiden keskipisteiden annettujen ympyröiden keskipisteistä mitattujen etäisyyksien erotus on vakio, joka on yhtä suuri kuin annettujen ympyröiden säteiden erotus. Keskipisteet ovat siis hyperbelinkaarella (Kuva 3).

Kolmen annetun ympyrän tapauksessa etsittävän ympyrän keskipiste saadaan kahden hyperbelin leikkauspisteinä. Mikä tekee tästä ratkaisusta nykypäivään soveltuvan, on se, että dynaamisen matematiikan ohjelmissa on sopivat työvälineet. Esimerkiksi GeoGebrassa kartioleikkaukseen määrittelyyn tarvitaan viisi pistettä. Ensimmäinen piste voisi olla keskipisteiden O_1 ja O_2 yhdistysjanasta ympyröiden kehien väliin jäävän jananosan keskipiste. Seuraavat pisteet saadaan vaikkapa annetut keskipisteet keskipisteinä ja janat $1+r_1$ ja $1+r_2$ sekä $2+r_1$ ja $2+r_2$ säteinä piirrettyjen ympyröiden leikkauspisteet. Toinen hyperbeli saadaan soveltamalla samaa menettelyä ympyröihin O_1 ja O_3 . Kuvaan 4 on piirretty kaksi ratkaisua.

Sanottiinpa Wikipediasta ja sen luotettavuudesta mitä tahansa, niin ainakin maallikkoharrastajan mielestä Apollonioksen ongelmasta saa sieltä nopeasti lisätietoa sekä suomeksi [1] että englanniksi [2], samoin etäpaikannuksesta [3]. Asiaa on käsitelty MathWorldin sivuillakin [4]; myös sieltä saa lisää tietoa ja linkkejä. Kannattaa lukea, sillä eivät



Kuva 3 Kahta ympyrää sivuavien ympyröiden keskipisteet ovat hyperbelillä, jonka polttopisteet ovat annettujen ympyröiden keskipisteet.



Kuva 4 Kolmea annettua ympyrää sivuavien ympyröiden keskipisteet ovat hyperbelien leikkauspisteissä.

Apollonioksen ongelman sovellukset etäpaikannukseen loppu. Sillä on käyttöä myös pakkausongelmien ja itseään korjaaviin koodien yhteydessä. Ne taas saattavat liittyä DVD-levyihin tai sairauksia aiheuttavien bakteereiden entsyymeihin tehoavien lääkkeiden suunnitteluun. Myös puhtaan matematiikan piirissä ongelmaa on yleistetty moneen suuntaan.

Lisää luettavaa:

- [1] http://fi.wikipedia.org/wiki/Apollonioksen_ongelma
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius
- [3] <http://en.wikipedia.org/wiki/LORAN>
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusProblem.html> ■