

Symbolinen laskenta ja GeoGebra 4

ERKKI LUOMA-AHO, Cygnaeus-lukio, Jyväskylä

HANNU KORHONEN, lehtori emeritus, Orimattila

Ylioppilastutkintolautakunnan uudistettu laskinohje on ensimmäinen askel kehityksessä, joka tuo vääjäämättömästi symbolisen laskennan ohjelmistot yhdeksi koulumatematiikan työvälineeksi.

Symbolinen laskenta on tähän saakka ollut keskeinen perustaito, jota oppilaille on pyritty opettamaan numerolaskujen rinnalla ja jota on vaadittu osattavaksi. Symbolinen laskenta käsittelee lukusymbolit π ja e sekä polynomialgebran, rationaalilausekkeiden laskutoimitukset, yhtälöiden ratkaisut, derivoinnin ja integroinnin. Joskus tähän on haluttu sisällyttää myös kaikki tarkoilla arvoilla laskeminen eli murtolukulaskut, numeeriset juurten sieventämiset jne. Symboliseen laskentaan pystyvät laskimet ovat koulukäytössä monissa maissa eivätkä eroa olennaisesti hinnaltaan graafisista laskimista. Myös tietokoneohjelmistot ovat kehittyneet ja tulleet edullisemmiksi viimeisten vuosikymmenten aikana eivätkä ole enää pelkästään alan asiantuntijoiden käytössä.

Uusi laskinohje

Ylioppilastutkintolautakunnan uusi laskinohje sallii kaikki funktio-, graafiset ja symboliset laskimet. Tarkoituksena on poistaa vanhan ohjeen soveltamiseen liittyvät epäselvyydet ja toisaalta ajanmukaistaa sallittuja apuvälinei-

tä. Uudistusta voidaan pitää sinänsä tervetulleena, sillä ajanmukaistamista on odoteltu jo vuosikaudet. Vaikka ylioppilastutkintosäädökset eivät muodollisesti ole estäneetkään symbolisten laskinten ja ohjelmistojen käyttämistä koulussa, niin käytännössä asia on niin ollut, sillä opiskelijoiden ei ole järkevää eikä usein taloudellisesti mahdollistakaan ostaa yhtä laskinta oppimisessa käytettäväksi ja toista vain ylioppilaskirjoituksiin. Opettajille ja koulutuksen järjestäjille tuleekin tästä syystä monta kysymystä ratkaistavaksi, sillä se muuttaa lukion matematiikan opetusta ja sen painotuksia. Vaikutus ulottuu itse asiassa peruskouluun asti, sillä siellä luodaan se pohjaa, jolta lukio jatkaa laskemisen opettamista.

Uudistus tulee voimaan jo keväällä 2012. Uusien lukiolaisten laskinhankinnoissa voidaan tähän jo varautua, mutta koulujen, erityisesti peruskoulujen, laitehankinnoissa uudistusväli on helpos- ti kymmenen vuotta. Sinä aikana aukkoa voidaan paikata tietokoneohjelmilla. Kaupalliset ohjelmat maksavat nekin, mutta tarjolla on myös ilmainen avoimen ympäristön ohjelma GeoGebra. Sen uusi nelosversio sisältää nimittäin myös symbolisen laskennan.

GeoGebra on useimmille opettajille tuttu ja monissa kouluissa jo vuosia käytetty ohjelma. Usein se mielletään dynaamisen geomet-

rian ohjelmistoksi, mutta sillä on alusta lähtien voinut piirtää myös funktio-opin kuvaajat. Nykyisin se sisältää lisäksi taulukkolaskennan ja nyt siis myös symbolisen laskennan. Kun siinä on lisäksi paljon analyysiin, todennäköisyyslaskentaan ja tilastotieteeseen liittyviä toimintoja, niin ohjelmisto riittää ja sopii työvälineeksi alakoulusta yliopistotasolle asti.

GeoGebra 4 ja CAS

GeoGebrian kääntäjät [1] ovat halunneet säilyttää ohjelman sisäl- lä – ainakin toistaiseksi – englan- ninkielisen nimen CAS (Computer Algebra System) ja odotella ku- vaavan suomenkielisen nimityk- sen vakiintumista. Version 4 suo- menkielinen käännös on jo valmis, mutta käännöstä korjataan ja täy- dennetään jatkuvasti seuraavien kuukausien aikana. Beta-vaiheessa oleva GeoGebra 4 on ladattavissa osoitteessa [2]. Version 4 etukäteen ilmoitettu virallinen julkistamis- ajankohta on toisen kansainvälisen GeoGebra-konferenssin aikaan elo- kuun lopulla [3], joten jossakin vai- heessa syksyä se siirtyy latautumaan entiseen tapaan pääsivun kautta [4]. Siihen saakka osoitteesta [4] latautuu versio 3.2.

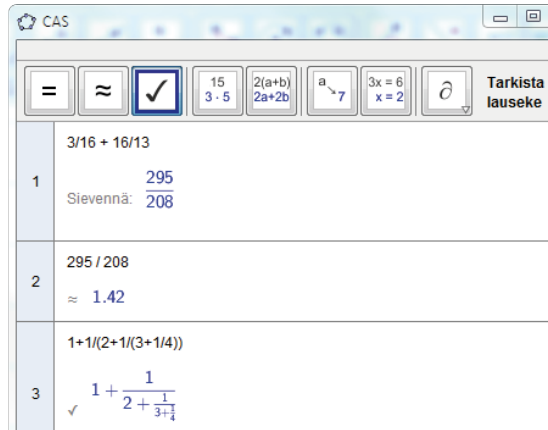
Symbolisen laskennan sisällyt- täminen osaksi GeoGebraa on suo- malaisen koulun kannalta ajankoh- taisin uudistus. Ohjelma on lisäksi uudistunut sekä rakenteeltaan että

sisällöltään. Nyt on mahdollisuus käyttää kahta toisiinsa linkitettyä piirtoikkunaa. Tilastotieteen kommentoja on lisätty runsaasti, jopa nykyiseen koulumatematiikkaan kuulumattomiakin jakaumia. CAS sisältää algebran ja analyysin ohella kompleksiluvut ja raja-arvot. Geometrian puolella uutena objektina on mm. avoin murtoviiva. GeoGebran kautta voi nykyisin jopa soittaa erilaisia ääniä. Tällä lie-nee käyttöä lähinnä alakoulujen puolella ja ehkä luonnontieteiden opetuksessa.

Ominaisuudet ovat siis lisääntyneet runsaasti ja tätä nykyä vaatimattomasta alusta ja rajatusta kohdeyleisöstä lähtenyt ohjelma alkaa ominaisuuksiensa puolesta tavoittaa kaikki ajateltavissa olevat kouluasteet. Tällaisen kehityksen vaarana on tietenkin se, että lisääntyvät ominaisuudet alkavat heikentää käytettävyyttä. Toistaiseksi tätä on välttytty. Sivustolla [5] voi tutustua GeoGebran historiaan, nykyisyyteen ja tulevaisuuteen.

Symbolisen laskennan mahdollisuuksia

Suurimman muutoksen voidaan ajatella tulevan algebran laskujen opettamiseen käytettävän ajan ja-ossa. On mahdollista entistä vapaammin suunnitella merkityksiä luovan perushahmotuksen ja laskutoimitusten automatisoimiseen tähtäävän rutiiniharjoittelun suhdetta. Molempia tarvitaan, mutta painopistettä voidaan siirtää – ja ihan alussa tämä on erityisen tärkeää – ymmärtämisen suuntaan. Ja varmuutta oppilaille, samoin kuin laskuviivaimet ja laskimet aikaisemmin numerolaskuissa, tuo mahdollisuus tarkastaa suorituksensa ja merkintänsä (Kuva 1). Tämä koskee jo murtolukuja, mutta erityisesti kirjainalgebraa peruskoulusta asti. Ymmärtämistä algebraan



Kuva 1. GeoGebran CAS sekä laskee laskuja että tarkastaa kirjoitetun lausekkeen oikeellisuuden.

Komento	Tuloste
Sievennä [2x + 3x]	5x
JaaTekijöihin [x ⁴ -x ²]	x ² (x - 1) (x + 1)
Ratkaise [x ² -2x-3=0]	{x = 3, x = -1}
Raja_arvo [(2x-2)/(x ² -1), x, 1]	1
Derivaatta [x*sin(3x)]	x 3 cos(3 x) + sin(3 x)
Sievennä [Derivaatta [x*sin(3x)]]	3 x cos(3 x) + sin(3 x)
Integraali [ln(x)]	x ln(x) - x
Normaalijakauma [2, 1, 1.5]	0.31

Kuva 2. Esimerkkejä GeoGebran CAS-komentojen käytöstä.

kaivataankin, sillä ylioppilastutkintolautakunnan jäsenet ja sensorit valittelevat vuodesta toiseen, että kokelaat eivät ymmärrä, mitä ovat tekemässä.

Lukiomatematiikassa kurssien MAA1 ja MAA2 aikana opitaan tarkan arvon käyttö ja systematisoidaan ensimmäisen ja toisen asteen lausekkeiden sievennykset ja yhtälöiden ratkaisut. Nämä sisällöt

onnistuvat tietenkin GeoGebran avulla. Kurssien MAA7-MAA10 differentiaalilaskenta ja integrointi onnistuu myös, kuten vaikkapa kurssin MAA13 osamurtohajotelmat. GeoGebran symbolisella laskennolla on kuitenkin rajoitteensa. Esimerkiksi tavanomainen osittaisintegroinnin harjoitus lausekkeen xe^x integrointi ei ainakaan toistaiseksi onnistu GeoGebralta. ■

Lisää luettavaa

- [1] <http://hylblog.edu.hel.fi/wpmu/geogebraverkosto/>
- [2] <http://www.geogebra.org/webstart/4.0/geogebra-40.jnlp>
- [3] http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/GeoGebra_Conference_2011
- [4] <http://www.geogebra.org/>
- [5] <http://www.geogebra.org/cms/fi/roadmap>