

# GeoGebra Quickstart

Lyhyt GeoGebra 2.7 -ohje suomeksi

*GeoGebra* on ilmainen matematiikan opetusohjelma. Siinä on työvälineitä dynaamiseen geometriaan, algebraan ja analyysiin.

Voit piirtää helposti kuvioita, jotka rakentuvat pisteistä, janoista, vektoreista, suorista ja kartioleikkauksista. Voit muuttaa niitä dynaamisesti hiirellä jälkeenpäin. Voit myös kirjoittaa funktioiden lausekkeita suoraan koulumatematiikan merkintätavan mukaisesti g:  $3x + 4y = 7$  tai c:  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ . Syöttökenttään voit poimia komentoja valikosta, esimerkiksi Derivaatta tai Integraali ovat käytettävissä. Huomionarvoisin GeoGebraan piirre on objektien dynaamisuuden kaksisuuntaisuus: algebraikkunassa olevan lausekkeen muuttaminen muuttaa funktion kuvaajaa ja geometriaikkunassa olevan objektin muuttaminen muuttaa vastaavasti algebraikkunan lauseketta.

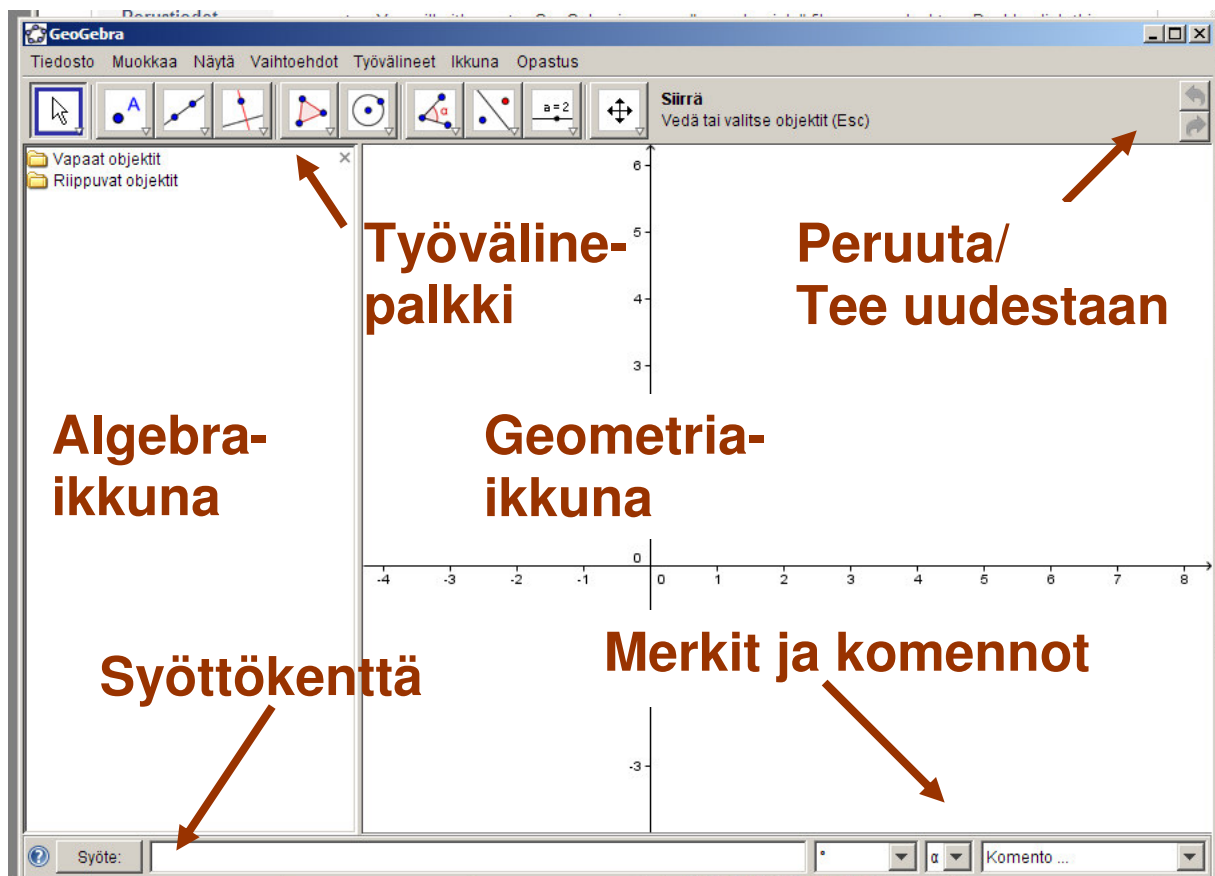
Seuraavassa tutustut GeoGebraan kolmen esimerkin avulla. Käy ne läpi yksi kerrallaan äläkä unohda kokeilla annettuja vihjeitä.

**Esimerkki 1:** Kolmion ympäri piirretty ympyrä

**Esimerkki 2:** Ympyrän tangentit

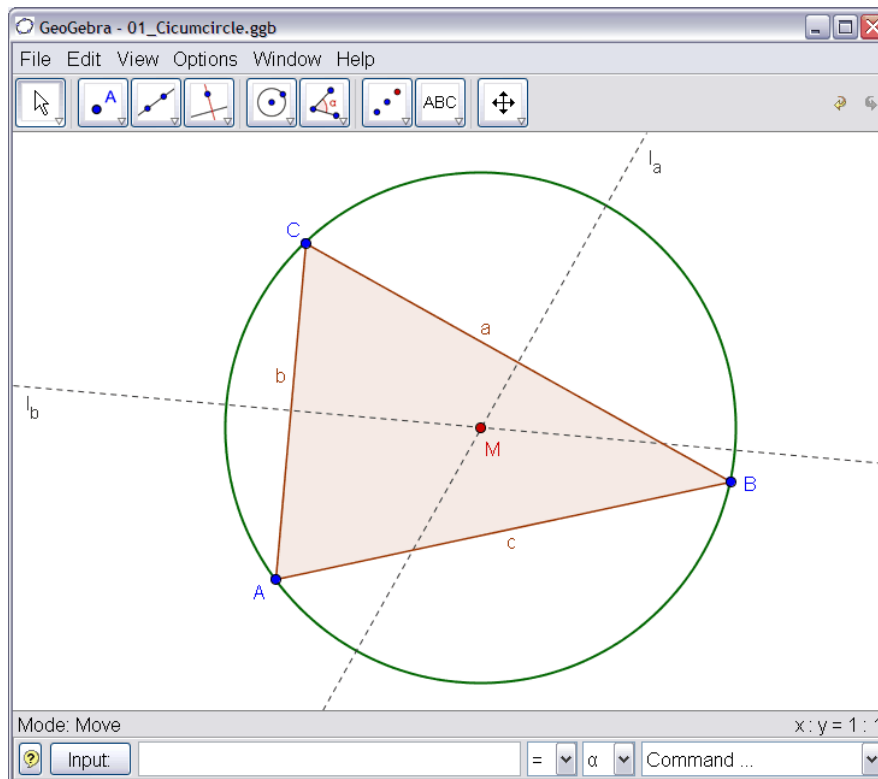
**Esimerkki 3:** Funktion derivaatta ja tangenti

Kun käynnistät GeoGebraan, aukeaa alla oleva ikkuna. *Työvälinepalkissa* näkyvien työvälineiden (toimintotilojen) avulla voit luoda hiirellä piirroksia (konstruktioita) piirtoalueelle *geometriaikkunaan*. Objektien koordinaatit ja yhtälöt näkyvät samanaikaisesti *algebraikkunassa*. Syöttökenttään voit kirjoittaa koordinaatteja, yhtälöitä, komentoja ja funktioita. Ne näkyvät algebra- ja geometriaikkunoissa heti, kun painat Enter-näppäintä.








# Esimerkki 1: Kolmion ympäri piirretty ympyrä

**Tehtävä:** Piirrä kolmio  $A, B, C$  ja ympyrä sen ympärille.





## Piirrä käyttäen hiirtä

-  Valitse työväline “Monikulmio” työvälinepalkista (näpäytä vasemmalta lukien kolmannen pikkukuvan oikeassa alanurkassa olevaa pienempintä kolmiota). Näpäytä geometriaikkunaa kolme kertaa luodaksesi kärkipisteet  $A, B$ , and  $C$ . Sulje kolmio näpäyttämällä lopuksi uudestaan pistettä  $A$ .
-  Valitse sitten “Keskinormaali” vasemmalta lukien neljännessä valikosta. Piirrä kaksi keskinormaalia näpäyttämällä kolmion kahta sivua.
-  Valitse “Leikkauspiste” vasemmalta lukien toisesta valikosta, osoita keskinormaalien leikkauskohtaa ja näpäytä. (Molemmat suorat näkyvät lihavoituina, kun olet tarpeeksi lähellä leikkauspistettä.) Nimeä saamasi keskipiste  $M$ :ksi näpäyttämällä sitä hiiren oikealla näppäimellä (Mac OS: ctrl-click) ja valitsemalla “Nimeä uudestaan” näkyviin ilmestyvästä valikosta.
-  Valitse “Ympyrä: keskipiste ja kehän piste” vasemmalta lukien kuudennesta valikosta, näpäytä pistettä  $M$  ja jotakin kärkipistettä.
-  Valitse lopuksi “Siirrä” vasemmanpuolimmaisesta valikosta. Nyt voit siirtää kärkipisteitä – saat kokea, mitä “dynaaminen geometria” tarkoittaa.

## Vihjeitä

- Kokeile työvälinepalkin oikeassa päässä olevaa “Peruuta”-näppäintä.
- Voit piilottaa objektin näpäyttämällä sitä hiiren oikealla näppäimellä (Mac OS: ctrl-click) ja poistamalla valinnan “Näytä objekti”.

- Objektien ulkoasua (väriä, viivan tyyppiä, ...) voit muuttaa helposti: näpäytä objektia hiiren oikealla näppäimellä (Mac OS: ctrl-click) ja valitse "Ominaisuudet" näkyviin ilmestyvästä valikosta.
- "Näytä"-valikosta voit piilottaa tai näyttää uudestaan algebraikkunan, akselit ja koordinaattiruuduston.
- Voit siirtää piirtoaluetta valitsemalla työvälinepalkin oikeanpuolimmaisesta valikosta "Siirrä piirtoaluetta"  ja vetämällä hiirellä (vasen näppäin alas painettuna).
- Työväline "Näytä – Objektiluettelo" avaa ikkunan, jossa on luettelo kaikista piirroksen vaiheista objekti objektilta. Voit katsella piirroksen tekovaiheita askel askeleelta nuolinäppäimien avulla ja myös muuttaa vaiheiden järjestystä jälkeenpäin (katso objektiluettelon valikkoa "Opastus"). Voit lisäksi käyttää objektiluettelon omaa opastusta.
- Lisätietoa piirroksista saat "Opastus"-valikon ylimmältä riviltä  "Opastus" aukeavan on-line-ohjekirjan luvusta 3 "Geometriset objektit".

## Piirroksen luominen syöttökentästä

Aiomme tehdä nyt saman piirroksen kirjoittamalla tekstiä syöttökenttään. Tarvitset uuden puhtaan piirtoalueen (valikko "Tiedosto – Uusi"). Kirjoita seuraavat komennot näytön alareunassa olevaan syöttökenttään ja paina Enter jokaisen rivin loppuun.

```
A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (8, 11)
Monikulmio[A, B, C]
l_a = Keskinormaali[a]
l_b = Keskinormaali[b]
M = Leikkauspiste[l_a, l_b]
Ympyrä[M, A]
```

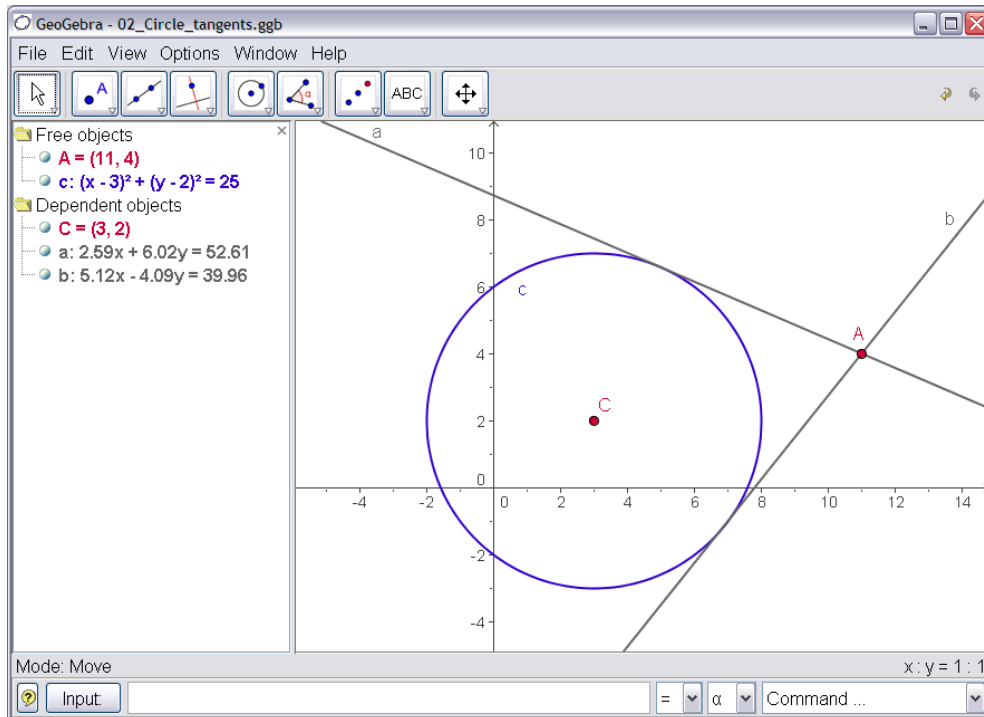
Huomaa, että komento "Monikulmio" on samalla nimennyt monikulmion sivut.

## Vihjeitä

- Komentojen automaattinen täydentäminen: komento näytetään, kun olet kirjoittanut kaksi ensimmäistä kirjainta. Jos hyväksyt ehdotuksen, paina Enter-näppäintä. Muussa tapauksessa jatka kirjoittamista.
- Komentojen kirjoittaminen ei ole välttämätöntä, sillä voit myös valita ne komento-listasta, joka on syöttökentän oikealla puolella.
- Pääset kirjoittamaan syöttökenttään näpäyttämällä hiirellä syöttökentän vasemalla puolella olevaan ikonia "Syöte" tai itse syöttökenttää. Kun syöttökenttä on aktiivinen, voit kopioida objektin nimen syöttökenttään näpäyttämällä objektia algebraikkunassa tai piirtoalueella.
- Eriyisen hyvin tuloksiin pääset yhdistämällä molempien syöttötapojen edut, siis piirrosten tekemisen hiirtä käyttäen tai syöttökenttään kirjoittaen.

## Esimerkki 2: Ympyrän tangentit

**Tehtävä:** Piirrä ympyrä  $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$  ja sen tangentit, jotka kulkevat pisteen  $A = (11, 4)$  kautta.



### Piirroksen tekeminen syöttökenttää ja hiirtä käyttäen

Kirjoita syöttökenttään ympyrän yhtälö  $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$  ja paina Enter-näppäintä (vihje: eksponentin saat myös syöttökentän oikealla puolella olevasta listasta.)

Kirjoita komento  $C = \text{Ympyrä}[c]$  syöttökenttään.

Luo piste  $A$  kirjoittamalla  $A = (11, 4)$ .



Valitse nyt työväline "Tangentit" ja näpäytä pistettä  $A$  ja ympyrää  $c$ .



Valitse "Siirrä", siirrä pistettä  $A$  hiirellä ja tarkkaile tangentteja.

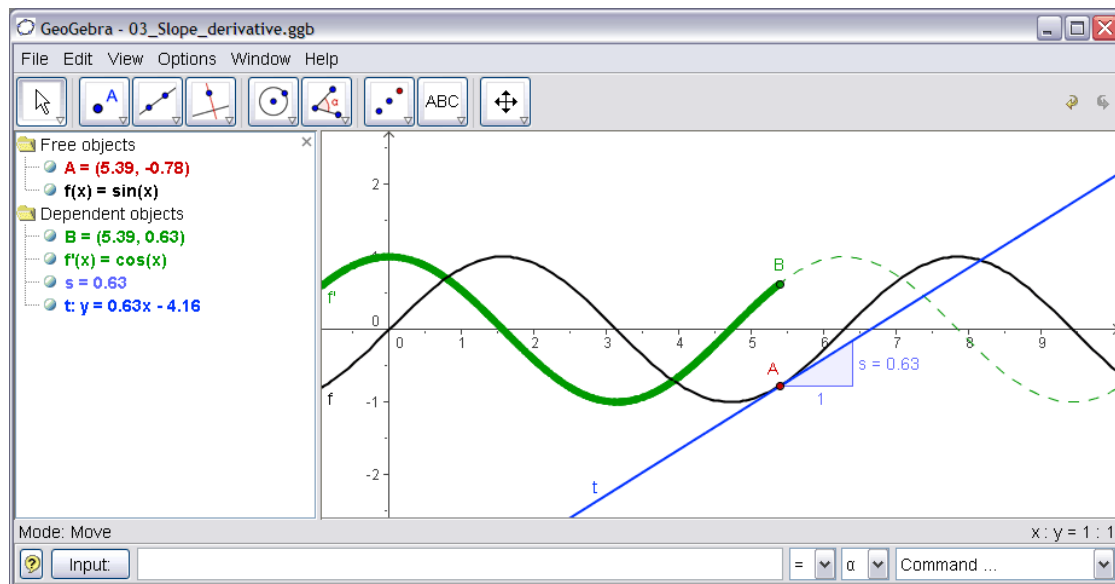
Voit myös yrittää siirtää ympyrää  $c$  ja tarkkailla sen yhtälöä algebraikkunassa.

### Vihjeitä






- Käytä työvälinepalkin oikeanpuolimmaisesta valikon työvälineitä suurentamiseen ja pienentämiseen. Jos hiiressäsi on pyörä, kokeile yhdistelmää  $\text{ctrl} +$  hiiren pyörä.
- Algebraikkunassa olevaa ympyrän yhtälöä on mahdollista muuttaa suoraan ikkunassa kaksoisnäpäyttämällä sitä.
- Lisätietoja syöttökentästä saat Opastus-valikon ensimmäiseltä riviltä avautuvan GeoGebra-oppaan kohdasta 4 "Algebraiset syötteet".

## Esimerkki 3: Funktion derivaatta ja tangentti


**Tehtävä:** Piirrä funktion  $f(x) = \sin(x)$  kuvaaja ja sen derivaatan kuvaaja sekä funktion kuvaajan tangentti kuvaajalla olevan pisteen kautta ja lopuksi kulmakerroimen näyttävä kolmio.



### Versio 1: Kuvaajalla oleva piste

-  Kirjoita funktio  $f(x) = \sin(x)$  syöttökenttään ja paina Enter..
-  Valitse "Uusi piste" ja näpäytä kuvaajaa. Tämä luo pisteen A.
-  Valitse sitten "Tangentit" ja näpäytä pistettä A ja funktion  $f$  kuvaajaa. Vaihda tangentin nimeksi  $t$  (hiiren oikea näppäin (Mac OS: ctrl-click), "Nimeä uudelleen"). Kirjoita komento  $s = \text{Kulmakerroin}[t]$ .
-  Valitse "Siirrä", vedä pistettä A hiirellä ja tarkkaile tangentin muuttumista. Kirjoita  $B = (x(A), s)$  ja ota käyttöön tämän pisteen jälki (näpäytä pistettä B hiiren oikealla näppäimellä (Mac OS: ctrl-click)). Komento  $x(A)$  antaa A:n x-koordinaatin.
-  Valitse "Siirrä" ja vedä pistettä A hiirellä – B jättää jäljen. Kirjoita komento  $\text{Derivaatta}[f]$ . Näytä pisteen B koordinaatit (avaa pisteen B ominaisuusvalikko hiiren oikealla näppäimellä, valitse "Ominaisuudet" ja välilehdeltä "Perusominaisuudet" kohdan "Näytä nimi" pudotusvalikosta "Nimi & Arvo", sulje valikkoikkuna. Vertaa koordinaatteja ja tangentin kulmakerrointa. [Suomentajan lisäys.]

### Vihjeitä

- Kirjoita tekstikenttään erilainen funktio samalla nimellä, esimerkiksi  $f(x) = x^3 - 2x^2$ . Välittömästi näkyvät tämän derivaatta ja tangentti.
- Valitse  "Siirrä" ja vedä funktion kuvaajaa hiirellä. Tarkkaile funktion ja sen derivaatan yhtälön muuttumista.

## Versio 2: Piste kohtaan $x = a$

Teemme nyt edellisen konstruktion toisella tavalla. Valitse siksi “Tiedosto – Uusi”, jotta pääsisit aloittamaan puhtaalta piirtoalustalta. Kirjoita sitten seuraavat komennot syöttökenttään ja paina Enter jokaisen rivin loppuun.

```
f(x) = sin(x)
a = 2
T = (a, f(a))
t = Tangentti[a, f]
s = Kulmakerroin[t]
B = (x(T), s)
Derivaatta[f]
```

Valitse “Siirrä” ja näpäytä lukua  $a$ . Voit muuttaa luvun  $a$  arvoa painamalla nuolinäppäimiä. Samaan aikaan piste  $T$  ja tangentti liikkuvat function  $f$  kuvaajaa pitkin.

**Liuku:** Voit muuttaa luvun  $a$  arvoa käyttämällä liukua: näpäytä algeraikkunassa olevaa lukua  $a$  hiiren oikealla painikkeella (Mac OS: ctrl-click) ja valitse “näytä objekti”.

**Vihje:** liu’ut ja myös nuolinäppäimet ovat hyvin hyödyllisiä parametrien tutkimisessa, esimerkiksi  $p$  ja  $q$  paraabelin yhtälössä  $y = x^2 + p x + q$ .

## Tangentin konstruointi käyttämättä tangentti-komentoa

GeoGebra osaa käsitellä vektoreita ja myös suorien parametriesityksiä. Näin ollen on mahdollista konstruoida tangentti ilman komentoa *Tangentti[]*. Kokeillaksesi tätä poista tangentti piirroksestasi näpäyttämällä sitä hiiren oikealla näppäimellä (Mac OS: ctrl-click) ja valitsemalla “Poista” ikkunan vasemmasta alanurkasta. Kirjoita sitten seuraavat komennot:

```
v = (1, f'(a))
t: X = T + r v
```

Objekti  $v$  on tangentin  $t$  suuntavektori. Voit käyttää mitä tahansa kirjainta parametrin  $r$  asemesta.

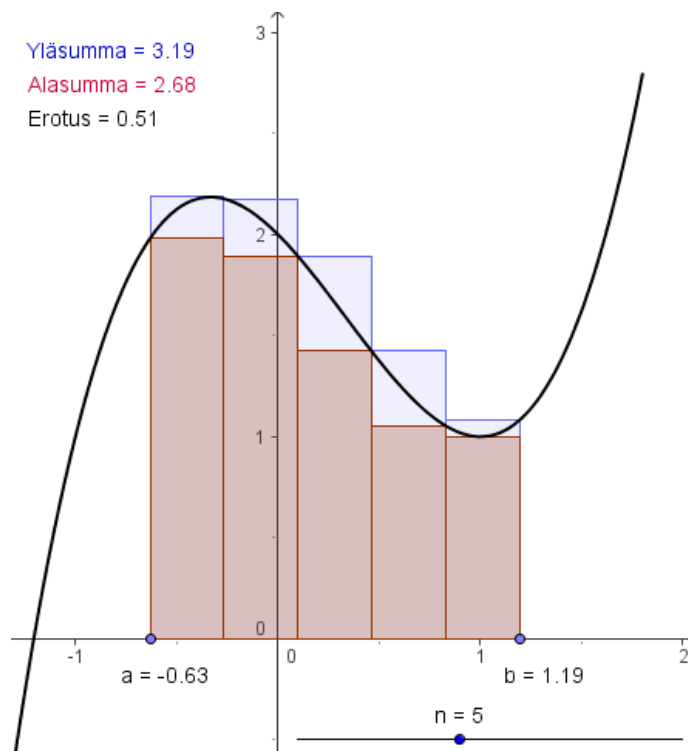
## Vihjeitä

- On vielä yksi lisämahdollisuus tangentin konstruointiin suuntavektorin avulla:  
 $t = \text{Line}[T, v]$ .
- Kokeile myös komentoa *Integraali[f]*
- Lisäohjeita GeoGebran komennoista saat opastuksen kohdasta 4.3 “Komennot”. *GeoGebran käyttöoppaan* (pdf-tiedosto englanninkielisenä) voit ladata osoitteesta [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).
- Suomenkielisen GeoGebra-oppaan (pdf-tiedosto) versiolle 3.0 saat osoitteesta [http://www.geogebra.org/source/translation/help/translated\\_documents/docufi30.doc](http://www.geogebra.org/source/translation/help/translated_documents/docufi30.doc). NB: Opas on toistaiseksi alkuperäisessä korjaamattomassa muodossaan ja sisältää siksi joitakin virheitä. [Suomentajan huomautus]

## Lisätietoja

Olet tervetullut GeoGebran kotisivulle [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Sieltä löydät lisää tietoa sekä saat uusimman ohjelmaversioon. Valitse haluamasi kieli näytön oikeasta yläkulmasta.

GeoGebralla voit luoda helposti dynaamisia työtiedostoja, joita voidaan käyttää minkä tahansa internet-selaimen kanssa (esimerkiksi Firefox, Safari tai Internet Explorer). Esimerkkejä ja lisätietoja saat GeoGebran verkkosivuilta.



GeoGebra Homepage

[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

GeoGebra User Forum

[www.geogebra.org/forum](http://www.geogebra.org/forum)

suomenkielinen

<http://www.geogebra.org/forum/viewforum.php?f=33>

GeoGebraWiki - pool of educational material

[www.geogebra.org/en/wiki](http://www.geogebra.org/en/wiki)

suomenkielinen

<http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Finnish>

Jos sinulla on ehdotuksia tai haluat antaa palautetta GeoGebrasta tai tästä paperista, ota yhteyttä Markus Hohenwarteriin ([mhohen@gmail.com](mailto:mhohen@gmail.com)).